Základní věta

Věta (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P *a* Q *jsou nesoudělné polynomy splňující* $\deg P < \deg Q$. *Nechť*

$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_l)^{m_l} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} \cdots (x^2 + b_k x + c_k)^{n_k},$$

$m_i, n_j \in \mathbb{N}$, *kde všechny lineární členy i všechny kvadratické členy jsou po dvou různé a navíc žádný kvadratický člen nemá reálné kořeny. Potom*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{m_i} \frac{A_m^i}{(x - a_i)^m} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{n_j} \frac{B_n^j x + C_n^j}{(x^2 + b_j x + c_j)^n}$$

pro nějaká $A_m^i, B_n^j, C_n^j \in \mathbb{R}$. *Takový rozklad je navíc určen jednoznačně.*

Příklady

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Příklady

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Příklady

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

Příklady

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

$$\frac{x^4-2x+1}{(x+3)^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}(x+1) = \frac{A}{x+1}(x+1) + \frac{B}{x-2}(x+1)$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}(x+1) = \frac{A}{x+1}(x+1) + \frac{B}{x-2}(x+1)$$

$$\frac{x-1}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}(x+1) = \frac{A}{x+1}(x+1) + \frac{B}{x-2}(x+1)$$

$$\frac{x-1}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$A = \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2} \qquad \text{(platí pouze pro } x \neq -1, 2\text{)}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}(x+1) = \frac{A}{x+1}(x+1) + \frac{B}{x-2}(x+1)$$

$$\frac{x-1}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$A = \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2} \qquad \text{(platí pouze pro } x \neq -1, 2\text{)}$$

$$\lim_{x\to-1} A = \lim_{x\to-1} \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}(x+1) = \frac{A}{x+1}(x+1) + \frac{B}{x-2}(x+1)$$

$$\frac{x-1}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$A = \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2} \qquad \text{(platí pouze pro } x \neq -1, 2\text{)}$$

$$\lim_{x\to -1} A = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$A = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2} = \left.\frac{x-1}{x-2}\right|_{x=-1}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}(x+1) = \frac{A}{x+1}(x+1) + \frac{B}{x-2}(x+1)$$

$$\frac{x-1}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$A = \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2} \qquad \text{(platí pouze pro } x \neq -1, 2\text{)}$$

$$\lim_{x\to -1} A = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$A = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-2} - \frac{B(x+1)}{x-2} = \left.\frac{x-1}{x-2}\right|_{x=-1} = \frac{2}{3}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A \to \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A \to \frac{x-1}{(x-2)}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A = \left.\frac{x-1}{(x-2)}\right|_{x=-1} = \frac{2}{3}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A = \frac{x-1}{\qquad\qquad (x-2)}\bigg|_{x=-1} = \frac{2}{3}$$

$$B \to \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A = \frac{x-1}{\qquad\qquad (x-2)}\Bigg|_{x=-1} = \frac{2}{3}$$

$$B \to \frac{x-1}{(x+1)\qquad\qquad}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A = \left.\frac{x-1}{(x-2)}\right|_{x=-1} = \frac{2}{3}$$

$$B = \left.\frac{x-1}{(x+1)}\right|_{x=2} = \frac{1}{3}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A = \left.\frac{x-1}{(x-2)}\right|_{x=-1} = \frac{2}{3}$$

$$B = \left.\frac{x-1}{(x+1)}\right|_{x=2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} =$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A \to \frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A = \frac{x-1}{\qquad\qquad (x-2)^2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A = \left.\frac{x-1}{(x-2)^2}\right|_{x=-1} = -\frac{2}{9}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A = \left.\frac{x-1}{(x-2)^2}\right|_{x=-1} = -\frac{2}{9}$$

$$C \to \frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A = \left.\frac{x-1}{(x-2)^2}\right|_{x=-1} = -\frac{2}{9}$$

$$C = \frac{x-1}{(x+1)}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A = \left.\frac{x-1}{(x-2)^2}\right|_{x=-1} = -\frac{2}{9}$$

$$C = \left.\frac{x-1}{(x+1)}\right|_{x=2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} - \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x-1-\frac{1}{3}(x+1)}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$B \to \frac{\frac{2}{3}}{(x+1)(x-2)}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$B \to \frac{\frac{2}{3}}{(x+1)\qquad\qquad}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$B = \left.\frac{\frac{2}{3}}{(x+1)}\right|_{x=2} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{\frac{2}{9}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

$$A = \left.\frac{3x^2+5}{x^2-x+2}\right|_{x=-1} = 2$$

Zakrývací metoda

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

$$A = \left.\frac{3x^2+5}{x^2-x+2}\right|_{x=-1} = 2$$

$$\frac{Bx+C}{x^2-x+2} = \frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} - \frac{2}{x+1}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

$$A = \left.\frac{3x^2+5}{x^2-x+2}\right|_{x=-1} = 2$$

$$\begin{aligned}\frac{Bx+C}{x^2-x+2} &= \frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} - \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{3x^2+5-2x^2+2x-4}{(x+1)(x^2-x+2)}\end{aligned}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

$$A = \left.\frac{3x^2+5}{x^2-x+2}\right|_{x=-1} = 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{Bx+C}{x^2-x+2} &= \frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} - \frac{2}{x+1} \\
&= \frac{3x^2+5-2x^2+2x-4}{(x+1)(x^2-x+2)} \\
&= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x^2-x+2)}
\end{aligned}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

$$A = \left.\frac{3x^2+5}{x^2-x+2}\right|_{x=-1} = 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{Bx+C}{x^2-x+2} &= \frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} - \frac{2}{x+1} \\
&= \frac{3x^2+5-2x^2+2x-4}{(x+1)(x^2-x+2)} \\
&= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x^2-x+2)} \\
&= \frac{x+1}{x^2-x+2}
\end{aligned}$$

Zakrývací metoda

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

$$A = \left.\frac{3x^2+5}{x^2-x+2}\right|_{x=-1} = 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{Bx+C}{x^2-x+2} &= \frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} - \frac{2}{x+1} \\
&= \frac{3x^2+5-2x^2+2x-4}{(x+1)(x^2-x+2)} \\
&= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x^2-x+2)} \\
&= \frac{x+1}{x^2-x+2}
\end{aligned}$$

$$\frac{3x^2+5}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+2}$$

Obecný případ

$$\frac{x^4 - 2x + 1}{(x+3)^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$$

Obecný případ

$$
\begin{aligned}
\frac{x^4 - 2x + 1}{(x+3)^2(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2} \\
x^4 - 2x + 1 &= A(x+3)(x^2+2)^2 + B(x^2+2)^2 \\
&\quad + (Cx+D)(x+3)^2(x^2+2) + (Ex+F)(x+3)^2
\end{aligned}
$$

Obecný případ

$$
\begin{aligned}
\frac{x^4 - 2x + 1}{(x+3)^2(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2} \\
x^4 - 2x + 1 &= A(x+3)(x^2+2)^2 + B(x^2+2)^2 \\
&\quad + (Cx+D)(x+3)^2(x^2+2) + (Ex+F)(x+3)^2 \\
&= (A+C)x^5 \\
&\quad + (3A+B+6C+D)x^4 \\
&\quad + (4A+11C+6D+E)x^3 \\
&\quad + (12A+4B+12C+11D+6E+F)x^2 \\
&\quad + (4A+18C+12D+9E+6F)x \\
&\quad + 12A+4B+18D+9F
\end{aligned}
$$

Obecný případ

$$\begin{aligned}
x^4 - 2x + 1 = {} & (A + C)x^5 \\
& + (3A + B + 6C + D)x^4 \\
& + (4A + 11C + 6D + E)x^3 \\
& + (12A + 4B + 12C + 11D + 6E + F)x^2 \\
& + (4A + 18C + 12D + 9E + 6F)x \\
& + 12A + 4B + 18D + 9F
\end{aligned}$$

Obecný případ

$$\begin{aligned}0x^5 + 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + (-2)x + 1 = {} & (A + C)x^5 \\ & +(3A + B + 6C + D)x^4 \\ & +(4A + 11C + 6D + E)x^3 \\ & +(12A + 4B + 12C + 11D + 6E + F)x^2 \\ & +(4A + 18C + 12D + 9E + 6F)x \\ & +12A + 4B + 18D + 9F\end{aligned}$$

Obecný případ

$$\begin{aligned}0x^5 + 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + (-2)x + 1 = {} & (A + C)x^5 \\ & +(3A + B + 6C + D)x^4 \\ & +(4A + 11C + 6D + E)x^3 \\ & +(12A + 4B + 12C + 11D + 6E + F)x^2 \\ & +(4A + 18C + 12D + 9E + 6F)x \\ & +12A + 4B + 18D + 9F\end{aligned}$$

Obecný případ

$$
\begin{aligned}
0x^5 + 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + (-2)x + 1 = {} & (A + C)x^5 \\
& +(3A + B + 6C + D)x^4 \\
& +(4A + 11C + 6D + E)x^3 \\
& +(12A + 4B + 12C + 11D + 6E + F)x^2 \\
& +(4A + 18C + 12D + 9E + 6F)x \\
& +12A + 4B + 18D + 9F
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
3A + B + 6C + D &= 1 \\
4A + 11C + 6D + E &= 0 \\
12A + 4B + 12C + 11D + 6E + F &= 0 \\
4A + 18C + 12D + 9E + 6F &= -2 \\
12A + 4B + 18D + 9F &= 1.
\end{aligned}
$$

Jak integrujeme parciální zlomky

Na integraci většiny parciálních zlomků stačí znalost základních substitucí a tabulkových integrálů.

Jak integrujeme parciální zlomky

Na integraci většiny parciálních zlomků stačí znalost základních substitucí a tabulkových integrálů.
Pomocí lineární substituce dostaneme:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} A\log|x-a|, & \text{pro } k=1 \\ \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k}, & \text{pro } k>1. \end{cases}$$

Jak integrujeme parciální zlomky

Na integraci většiny parciálních zlomků stačí znalost základních substitucí a tabulkových integrálů.
Pomocí lineární substituce dostaneme:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} A\log|x-a|, & \text{pro } k=1 \\ \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k}, & \text{pro } k>1. \end{cases}$$

Dále

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+B}{x^2+bx+c}\,dx &= \frac{A}{2}\int \frac{Ax+\frac{2B}{A}}{x^2+bx+c}\,dx \\ &= \frac{A}{2}\left(\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\,dx + \int \frac{\frac{2B}{A}-b}{(x^2+bx+c)^k}\,dx\right)\end{aligned}$$

a pomocí kvadratické substituce získáme:

$$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} \log(x^2+bx+c), & \text{pro } k=1 \\ \frac{1}{1-k}(x^2+bx+c)^{1-k}, & \text{pro } k>1. \end{cases}$$

Jak integrujeme parciální zlomky

Integrál $\int \frac{\frac{2B}{A} - b}{x^2 + bx + c}\, dx$ převedeme pomocí lineální substituce (až na multiplikativní konstantu) na integrál $\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt$.

Jak integrujeme parciální zlomky

Integrál $\displaystyle\int \frac{\frac{2B}{A} - b}{x^2 + bx + c}\, dx$ převedeme pomocí lineální substituce (až na multiplikativní konstantu) na integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt$.

Pro $k = 1$ použijeme $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\, dt \overset{c}{=} \arctan t$. Pro $k > 1$ jde o trikový integrál na per partes.

Závěrečné poznámky

Pokud $\deg P \geq \deg Q$ potom je potřeba nejdříve vydělit polynom P polnomem Q (se zbytkem), tj. nalézt polynomy $\tilde{P}$ a R takové, že platí

$$\deg \tilde{P} < \deg Q \quad \text{a} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\tilde{P}}{Q} + R.$$

Závěrečné poznámky

Pokud $\deg P \geq \deg Q$ potom je potřeba nejdříve vydělit polynom P polnomem Q (se zbytkem), tj. nalézt polynomy $\tilde{P}$ a R takové, že platí

$$\deg \tilde{P} < \deg Q \quad \text{a} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\tilde{P}}{Q} + R.$$

Rozklad na parciální zlomky pak aplikujeme na $\dfrac{\tilde{P}}{Q}$ a polynom R integrujeme standardním spůsobem.

Závěrečné poznámky

Pokud $\deg P \geq \deg Q$ potom je potřeba nejdříve vydělit polynom P polnomem Q (se zbytkem), tj. nalézt polynomy $\tilde{P}$ a R takové, že platí

$$\deg \tilde{P} < \deg Q \quad \text{a} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\tilde{P}}{Q} + R.$$

Rozklad na parciální zlomky pak aplikujeme na $\dfrac{\tilde{P}}{Q}$ a polynom R integrujeme standardním spůsobem.

Příklady na procvičení: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{(x^3+1)^2}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^3 x}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.